

КОМП'ЮТЕРНЕ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-ХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ПІДЗЕМНОЇ ГІДРОМЕХАНІКИ

Власюк А.П.

Українська державна академія водного господарства, м. Рівне, Україна

Сформульовано фізичні і математичні постановки крайових задач розчинення і вимивання солей і карстових порід, які залягають в основах гідротехнічних та енергетичних споруд, при фільтрації підземних вод в складних областях з криволінійними фіксованими границями. Отримано нову балансову граничну умову на межі фронту розчинення солей. Для невеликих значень критерія Пекле розв'язок відповідних задач отримано різницевиими методами. На основі розроблених алгоритмів проведено чисельні експерименти з використанням сучасних засобів комп'ютерної терхніки.

1. Постановка задачі. Розглянемо клас задач, пов'язаних з вивченням процесів розчинення та вимивання солей і карстових порід, які залягають в основах гідротехнічних та енергетичних споруд у вигляді окремих пластів, або сольових включень. При цьому розглянуті в даній роботі сольові включення моделюють процеси розчинення, вимивання та винесення солей і карстових порід в межах моделей абсолютно непроникного та сильно проникного тіл. Фільтраційне середовище вважається недеформованим однорідно-ізотропним або неоднорідно-анізотропним.

Математичну модель переносу солей в однорідно-ізотропних середовищах в фізичній площині в загально прийнятих позначеннях, як відомо [1-6], можна описати системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \vec{v} = \text{grad } \varphi, & \text{div } \vec{v} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right) - v_x \frac{\partial c}{\partial x} - v_y \frac{\partial c}{\partial y} - \gamma(c - c^*) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t} \end{cases} \quad (2)$$

при таких крайових умовах на межі області фільтрації G_Z :

$$\varphi|_{DA} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{AB} = 0, \quad \varphi|_{BC} = \chi H, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{DC} = 0, \quad (3)$$

$$c|_{DA} = \tilde{c}_1(x, y, t), \frac{\partial c}{\partial n}|_{AB} = 0, \frac{\partial c}{\partial n}|_{BC} = 0 \text{ або } c|_{BC} = \tilde{c}_2(x, y, t). \quad (4)$$

На межі розчинення сольового пласта (або включення) задається концентрація граничного насичення

$$c|_{\Gamma_\Phi} = c_m, \quad (5)$$

або більш строга (балансова) гранична умова [6], отримана на основі умови балансу солі на межі фронту розчинення сольового пласта, яка в порівнянні з (5), адекватніше описує процеси розчинення,

$$\left(D \frac{\partial c}{\partial n} + \left(\frac{D}{\delta} - v_n \right) c \right) \Big|_{\Gamma_\Phi} = \frac{D c_m}{\delta}, \quad (6)$$

де d - товщина дифузійного примежевого шару, що утворюється в околі фронту розчинення, v_n - нормальна складова вектора швидкості фільтрації;

$$c \Big|_{t=0} = \tilde{c}_0(x, y), \quad (7)$$

де $\tilde{c}_0(x, y), \tilde{c}_1(x, t)$ - обмежені достатньо гладкі функції, які задовольняють умовам узгодження на негладких межах області $\Omega_T = G_Z \times [0, t]$.

Оскільки вздовж лінії течії нормальна складова швидкості фільтрації $v_n=0$, то з (6) отримаємо

$$\left(\partial \frac{\partial c}{\partial n} - c \right) \Big|_{\Gamma_\Phi} = -c_m. \quad (8)$$

У випадку невеликих значень критерія Пекле, розв'язок крайової задачі (1)–(7) знаходиться різницевиими методами [5-6]. Розв'язок крайової задачі (1)–(8) шукається згідно ефективної методики переходу до області комплексного потенціалу [2] з наступним розв'язанням задачі в криволінійних координатах [8,9]. Згідно цього крайова задача (1)–(8) в безрозмірних криволінійних координатах області зведеного комплексного потенціалу $\omega = \varphi + \psi$, де ψ - функція течії, має вигляд

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (9)$$

$$\mathcal{H}(0, \psi) = 0, \mathcal{H}(1, \psi) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad (10)$$

$$g_1(\mathcal{H}(\varphi, 0), \mathcal{H}(\varphi, 0)) = 0, \quad \mathcal{H}(\varphi, Q) = b, \quad 0 \leq \varphi \leq 1,$$

$$v^2(\varphi, \psi) \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(D_1 \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(D_2 \frac{\partial c}{\partial \psi} \right) - \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right] - \gamma(c-1) = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (11)$$

$$c(0, \psi, t) = c_1, \quad \frac{\partial c(1, \psi, t)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial c(\varphi, 0, t)}{\partial \psi} = 0, \quad (12)$$

$$c(\varphi, Q, t) = 1 \quad \text{або} \quad \left(\delta v \frac{\partial c}{\partial \psi} + c \right) \Big|_{\psi = Q} = 1, \quad (13)$$

$$c(\varphi, \psi, 0) = c_0, \quad (14)$$

де Q - повна фільтраційна витрата рідини, яку потрібно знайти в ході розв'язання даної задачі, $g_1(x, y) = 0$ - рівняння підземного контуру гідротехнічної споруди.

Координати x_{ij}, y_{ij} , $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$ внутрішніх вузлів різницевої гідродинамічної сітки визначаються із розв'язку двох різницевих задач [8,9]

$$\begin{cases} (\Lambda u)_{ij} = 0, \\ u_{i0} = u_{i0}^{(s)}, u_{im} = u_{im}^{(s)}, i = \overline{1, n-1}, \\ u_{0j} = u_{0j}^{(s)}, u_{nj} = u_{nj}^{(s)}, j = \overline{1, m-1}, \end{cases} \quad (15)$$

Де $s=0,1,2,\dots$ – номер ітерації; Λ - різницевий оператор Лапласа, різницевий оператор Коші-Рімана або більш загальний еліптичний оператор, визначений на прямокутній сітці на п'ятиточковому шаблоні “хрест” або дев'ятиточковому шаблоні типу “ящик”; під u розуміється x або y .

Чисельний розв'язок (15) знаходиться методом послідовної верхньої релаксації [7].

В [8,9] розроблено три алгоритми побудови різницевої гідродинамічної сітки фільтраційного потоку. Один із них ґрунтується на чисельному розв'язанні послідовності двох задач Діріхле для рівняння Лапласа, другий – на чисельному розв'язанні послідовності двох задач для системи Коші-Рімана, третій – на чисельному розв'язанні послідовності двох задач для більш складнішого еліптичного оператора.

В результаті багатократного взаємозв'язаного чергування ітераційних процесів перерахунку координат внутрішніх вузлів з однієї сторони, і координат “плаваючих” вузлів – з іншої, отримуємо шукану різницеву гідродинамічну сітку.

Для крайової задачі (11)-(14) на отриманій різницевій сітці побудована монотонна різницева схема задачі масопереносу розчинених речовин та отримано її розв'язок локально-одновимірним методом О.А.Самарського. У внутрішніх вузлах різницевої гідродинамічної сітки, наприклад, різницеві рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{h_1^2} [D_{1,i+0.5} c_{i+1,j}^{k+0.5} - (D_{1,i-0.5} + D_{1,i+0.5}) c_{i,j}^{k+0.5} + D_{1,i-0.5} c_{i+1,j}^{k+0.5}] - \frac{1}{D_{1i} h_1} \cdot \\ & D_{1,i-0.5} (c_{i,j}^{k+0.5} - c_{i-1,j}^{k+0.5}) - 0.5 \cdot \gamma \cdot v_{ij}^{-2} (c_{ij}^{k+0.5} - 1) = 0.5 \cdot v_{ij}^{-2} \cdot \frac{c_{i+1,j}^{k+0.5} - c_{i,j}^k}{\tau}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_1^2} [D_{2,j+0.5} c_{i,j+1}^{k+1} - (D_{2,j-0.5} + D_{2,j+0.5}) c_{i,j}^{k+1} + D_{2,j-0.5} c_{i,j-1}^{k+0.5}] - \\ & - 0.5 \cdot \gamma \cdot v_{ij}^{-2} (c_{ij}^{k+1} - 1) = 0.5 \cdot v_{ij}^{-2} \cdot \frac{c_{ij}^{k+1} - c_{i,j}^{k+0.5}}{\tau} \end{aligned} \quad (17)$$

Неважко показати, що при достатній гладкості розв'язку задачі (11)-(14), отримана різницева схема адитивна і володіє сумарною апроксимацією порядку $O(h^2 + \tau)$, $h = \max(h_1, h_2)$, стійка по початкових і граничних даних і правій частині, а також рівномірно збігається з вказаними точностями в класі неперервних

коефіцієнтів. Розв'язок “одновимірних” різницевих схем знаходиться методом прогонки.

Проведено чисельний експеримент для таких значень безрозмірних параметрів: $D_m=10^{-6}$, $l_1=0.5$, $b=5$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0.1$, аналіз результатів якого при варіації різних параметрів показав, що повздовжня дисперсивність λ_1 незначно впливає в порівнянні з поперечною дисперсивністю λ_2 на величини потоків солі з кривлі пласта та на деформацію пласта.

В результаті розміреного розрахунку для параметрів $2l=10$ м, $b=50$ м, $\lambda_1=10$ м, $\lambda_2=1$ м, $H=10$ м, $\theta=1$ м/добу, $\sigma=0.4$, $\gamma=0$, $\rho_c=2.2 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_m=2$ кг/м³, $c_0=0$ встановлено, що на протязі трьох років експлуатації гідротехнічної споруди відбувається стабілізація значень потоків солі з кривлі пласта. Так, наприклад, максимальне значення потоку змінюється від величини 0.0318 кг/м/добу до величини 0.0183 кг/м/добу. Максимальна величина деформації пласта досягається під серединою флутбета і становить 0.15 м за 50 років експлуатації гідротехнічної споруди. При збільшенні товщини дифузійного примежевого шару δ зона повного розчинення зменшується в порівнянні з товщиною зони повного розчинення у випадку задання на межі фронту розчинення граничної умови (5).

1. Веригин Н.Н., Шержуков Б.С. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). - М.: Наука, 1969. - С. 237-313.
2. Лаврик В.И. О двух краевых задачах неустановившейся конвективной диффузии в случае фильтрации грунтовых вод со свободной поверхностью// Укр. мат.журнал-1976. -28, №5.-С. 667-681.
3. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах.-Киев: Наук.думка, 1991.- 432 с.
4. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах.-Киев: Наук. думка, 1991.-262 с.
5. Власюк А.П. Чисельне розв'язання задачі розчинення та винесення пластових солей з основи гідротехнічних споруд // Доп НАН України. –1995. - №7.-С. 37-39.
6. Власюк А.П. Теоретичне дослідження процесів розчинення та вимивання солей і карстових порід при фільтрації підземних вод в областях з криволінійними та вільними границями//Автореф. доктора техн.наук.-Київ, 1996.-43 с.
7. Самарский А.А., Гулин А.В.Численные методы. –М.: Наука, 1989.- 432 с.
8. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с “плавающими” узлами . -Киев, 1989 -55с. - (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 89.79).
9. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Чисельне розв'язання одного класу задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь . -Київ, 1994. -24 с. - (Препр./ НАН України. Ін-т математики; 94.36).